数理解析研究所講究録
43巻 1968年 105-114

工学上における非線形偏微分方程式の近似解の例

慶大 工学部　鬼頭史城

1. 緒言 工学上の諸問題で，非線形の方程式を解く問題が多数あることは，昔から言われている。[文献(1)] ここでは，近頃私の方で考えている非線形偏微分方程式の例を述べた。なお，併せて，私共 engineer が研究途上に出合った直交関数列の問題を，すこし附記しておいた。

2. 弾性棒の大たわみ振動の問題.

弾性棒の大たわみ振動を考える，ひとつの方法として，Hamilton の最小作用の原則によって，運動方程式を立てることが行なわれる[例えば，文献(7)] それに関連して，附帯條件つきの変分問題が取扱われる。ここでは，附帯條件が(等周問題と異なり)微分方程式の形で與えられる。[文献(3),(4),(5)]。問題は

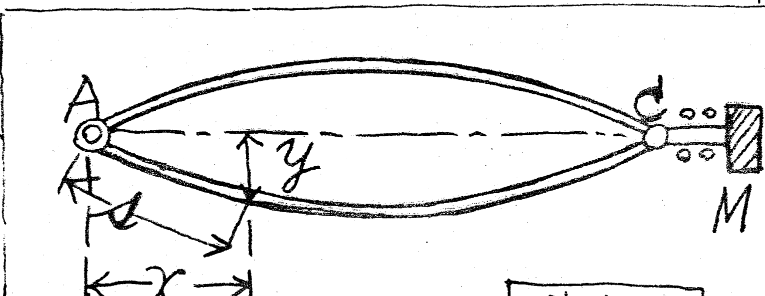
$$\Phi(x, x', ---; y, y', ---) = 0 \qquad --(2)$$

のもとに

$$I=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_0^{\xi}F(x,y,\ddot{x},\ddot{y},---;x',y',x'',y'',---)\,d\xi \qquad ------(1)$$

を極大極小ならしめることである。ここで $x'=\partial x/\partial\xi$, $x''=\partial^2x/\partial\xi^2$, ---, $\ddot{x}=\partial^2x/\partial t^2$, --- と書く。未定乗数法が適用できると思われるが，次記の簡単なケースは直接に式が立てられる。

大たわみ振動の基本式. $\boxed{\text{第1図}}$ のように，左端は角変位に対するバネ，右端は x 方向にスライドし得るように，バネ C と質量 M と，つないであるものとする。棒の曲げだけを考え，伸びは考えないものとする。一般に，ξ, t の関数 $U(\xi,t)$ に対して $U'=\partial U/\partial\xi$, $U''=\partial^2U/\partial\xi^2$, $\ddot{U}=\partial^2U/\partial t^2$, 等と書くものとする。また：—



第1図

s = arc length, $\xi=s/l$, $\lambda=1/l$, ρA = mass per unit length, of the bar, l=棒の長さ，EI=棒の曲げ剛性，T=動エネルギー，V_i=歪みエネルギー，　とすると，

$$T_1 = \frac{\rho A l}{2}\int_0^1 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]\, d\xi,$$
$$V_1 = \frac{1}{2} EI l \int_0^1 \lambda^2 [\overline{x''}^2 + \overline{y''}^2]\, d\xi,$$

$T_2 = \frac{1}{2} M(\dot{x}_1^2),\ V_2 = \frac{1}{2} C(x_1 - l)^2,$ （x_1 は $\xi=1$ における x の値）

$T_3 = 0,\ V_3 = \frac{1}{2} A(x'_0)^2$ （x'_0 は x' の $x=0$ における値）

そして

$$T_s = T_1 + T_2,\quad V_s = V_1 + V_2 + V_3$$

とおき，作用関数　$L_s = T_s - V_s$，に対して，Hamilton の原則により

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L_s\, dt = 0 \qquad \text{--- (3)}$$

を作ればよい。なお，x, y の間には常に関係式

$$(x')^2 + (y')^2 = l^2 \qquad \text{---- (4)}$$

が成り立たねばならない。 この変分問題を解くためには

(a). 積分（$t = t_1 \sim t_2$; $\xi = 0 \sim 1$）の被積分の項
(b). 境界値（$t = t_1, t_2$; $\xi = 0, 1$）に対する項

の両者を考えねばならない。ここでは (a) の問題だけを，とりあげる。

変分法の既知の方法によって計算すると，(3)の中味は

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 [Q\,\delta x + R\,\delta y]\, d\xi \qquad \text{---- (5)}$$

の形になる。ここで，簡単のために

$$\left.\begin{aligned} Q &= \rho A l \ddot{x} + EI\lambda^4 l\, x^{(4)} \\ R &= \rho A l \ddot{y} + EI\lambda^4 l\, y^{(4)} \end{aligned}\right\} \quad \text{----(6)}$$

とおく。なお，(4) によって $x'\delta x' + y'\delta y' = 0$ であるが，$0 < x' \leqq 1$ であるから

$$\delta x' = -(y'/x')\,\delta y' \qquad \text{----(7)}$$

となる。

<u>条件式 (4) のもとの，(5)式の変分問題</u>　一般に

$$\int_0^\xi Q\, d\xi = Q_p,\ \int_0^\xi R\, d\xi = R_p$$

と書くことにすると，

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 [Q\,\delta x]\, d\xi$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left| Q_p\,\delta x \right|_0^1 - \int_0^1 Q_p\,\delta x'\, d\xi \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left| Q_p\,\delta x \right|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{y'}{x'} Q_p\right) \delta y'\, d\xi \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left| Q_p\,\delta x + \frac{y'}{x'} Q_p\,\delta y \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{y'}{x'} Q_p\right) \delta y \cdot d\xi \right]$$

それ故，δx, δy のうちで，δy だけを独立変分とみなせば，方程式 (3) より

$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{y'}{x'}Q_p\right\}-R=0$, 従って, $y'Q_p-x'R_p=0$ ---(8)

これが, われわれの問題に対する基本微分方程式である。[ラグランジュの未定乗数法を(仮りに)適用してみても, 同じ結果, (8) が得られる。] さらに, 便宜上

$$\int_0^{\xi} x\,d\xi=X,\quad \int_0^{\xi} y\,d\xi=Y,\quad \frac{EI\lambda^{4}l}{\rho A l}=k,$$

とおけば, 方程式(8)は

$$\left.\begin{aligned} Y''\left[\ddot{X}+kX^{(4)}\right]-X''\left[\ddot{Y}+kY^{(4)}\right]&=0,\\ (X'')^2+(Y'')^2&=l^2 \end{aligned}\right\} \text{----(9)}$$

という形に直される。

逐次略近解法。微小振動に対しては

$$X_0''=l,\quad X_0=\frac{1}{2}l\xi^2,$$

であって, 方程式(9)は

$$0-X_0''\left[\ddot{Y}_0+kY_0^{(4)}\right]=0,$$

すなわち, 既知の弾性棒の横振動の方程式となる。
そこで

$$\left.\begin{aligned} Y&=Y_0+\mu Y_1+\mu^2 Y_2+\cdots\\ X&=X_0+\mu X_1+\mu^2 X_2+\cdots \end{aligned}\right\} \text{----(10)}$$

とおき, 微分演算子

$$B = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k\frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

を使い，(9)の代わりに，方程式

$$\left.\begin{aligned} X''[BY] &= \lambda Y''[BX], \\ (X'')^2 + (Y'')^2 &= l^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{------}(11)$$

を，（μの各べキの係数を比較して）解いてゆくことを，現在試みている。

3. 直交関数列に関する問題（engineerの立場から）

(イ). 緒言. 私共が，今取扱っている問題のひとつに，流体と弾性体とのかね合い振動の問題（Hydro-elasticityの問題）がある。そこでは，同一領域 $(0 \leqq x \leqq 1)$ に対して，2組の直交関数列 $[f_i(x), g_i(x); i=1, 2, 3, \cdots]$ をとりあつかう必要がおこる。これに関連して，次記のような問題が，おこってくる。

(ロ). 問題 1. ここに正規直交（完全）関数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ が与えられたとき，例えば

$$\varphi_i(x) = \sum_{m=1}^{i} A_{im} f_m(x) \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

なる関数列を作り，既知関数 $F(x)$ に対して

$$\int_0^1 F(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0 \qquad \text{----(12)}$$

ならしめたい。$f_i(x)$は

$$\int_0^1 f_i(x) f_j(x)\,dx = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

となっているものとする。

$\varphi_i(x)$は関数列であるが，お互いに直交すると限らない。Schmidtの方法によれば，$\varphi_i(x)$からlinear combinationによって$h_i(x)$を作り，$h_i(x)$が正規直交(完全)であるようにすることは可能である。[例えば文献(3), (4), Kap. II, §1.2] われわれエンジニアとしては，簡便な実行方法がほしい。

(ハ). 問題 2. ここに，全く独立した2つの正規直交(完全)関数列 $f_1(x), f_2(x), ---; g_1(x), g_2(x),$ ---- が与えられているものとする。

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 f_i(x) f_j(x)\,dx &= \delta_{ij}, \\ \int_0^1 g_i(x) g_j(x)\,dx &= \delta_{ij}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{-----(13)}$$

そこで

$$\left.\begin{aligned} f_i(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_{is}\, g_s(x) \\ g_i(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} N_{is}\, f_s(x) \end{aligned}\right\} \qquad \text{----(14)}$$

と展開すると

$$M_{is}=\int_0^1 f_i(x)\,g_s(x)\,dx,\quad N_{is}=\int_0^1 g_i(x)\,g_s(x)\,dx,$$

そして $N_{is}=M_{si}$ である。しかし，一般に $N_{is}\neq N_{si}$, $M_{is}\neq M_{si}$ $(s\neq i)$。そこで，

$$K_{st}=\sum_{i=1}^{\infty} M_{is}N_{it}=\sum_{i=1}^{\infty} M_{is}M_{ti} \quad \cdots(15)$$

と定義する。この K_{st} の数値を求める方法を知りたい。例えば $f_i(x)$, $g_j(x)$ に対する積分方程式の核 $\mathcal{K}_f(x,\xi)$, $\mathcal{K}_g(x,\xi)$ の項で表わしたい。なお，(14) より

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_{is}\left[\sum_{t=1}^{\infty} N_{st}\,f_t(x)\right] \\ &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} M_{is}\,N_{st}\,f_t(x) \end{aligned}$$

さらに $f_i(x)$, $f_j(x)$ をかけて積分すると $(i\neq j)$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \sum_{s=0}^{\infty} M_{is}N_{si} = \sum_{s=1}^{\infty} (M_{is})^2 \\ 0 &= \sum_{s=1}^{\infty} M_{is}N_{sj} = \sum_{s=1}^{\infty} M_{is}M_{js} \end{aligned}\right\} \cdots(16)$$

ということは，わかっている。

4. 拡散型方程式の問題. 岸上, 宮本(慶応義塾大学, 工学部)[温度とともに物性値が変化する場合の一次元非定常熱伝導, 日本機械学会論文集, 32巻, 244号, 昭41-12月]は, 偏微分方程式

$$c(\theta)\rho(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{K(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\}+A(x),$$

を取扱った。例えば $0<\theta<90^\circ C$ に対して

$$c(\theta)=0.160(1+0.00384\theta),$$
$$K(\theta)=0.293(1-2\times0.000605\theta),$$

の場合を調べている。[階差方程式, 計算機, 摂動法]

一般の初期値問題 wを或る量(例えば, 濃度)とするとき, 偏微分方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\ D=aw+b,\quad (a, b\text{ は定数})\end{aligned}\right\}\quad\text{------}(17)$$

に対して, $t=0$ のとき $w=\varphi(x,y,z)$ となるような w の(逐次近似的な)求め方が要望される。
$\varphi(x,y,z)$ は $|x|,|y|,|z|,<\infty$ に対して, 有限であるが, 連続であると限らないものとする。

参考文献

(1). Th. v. Kármán, The Engineer grapples with non-linear problems, Aug. 1940, Amer. Math. Soc.

(3) Courant-Hilbert, Methoden der Math. Physik, I, 2 Aufl. 1931, Kap. IV, §7-3, Differentialgleichungen as Nebenbedingungen.

(4) Courant-Hilbert, Methods of Math. Physics, Vol. I, 1953, Chap. IV, §7-3, Differential equations as subsidiary Conditions.

(5). A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 7. Abschnitt, Die Allgemeine Probleme der Variationsrechnung.

(6) A. R. Forsyth, Calculus of Variations, 1927, Chap. VIII, Relative maxima and minima, of Single Integrals, §269~270.

(7) H. Wagner, Large-amplitude Free-vibrations of a Beam, Journ. Appl. Mech., Dec., 1965

(8) 鬼頭 変分法と工学, 数学セミナー, 1964, 10, 11, 12月号 (文末に近頃の教科書名を記しておいた。)

(9) S. E. Dreyfus, Dynamic Programming and the Calculus of Variations, 1965, Academic Press, Chap. III.

(10). W. F. Ames, Non-linear partial Differential Equations, Academic Press, 1967. [新刊書の例として]

(以上)